اختبار في التحليل العددي - موعد ب - 22.7.12 .
أجب على 4 أسئلة فقط - بالنجاح الباهر .

1. أ. احسب مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^n+3^n}{8^n}\right)^2$. وضح مراحل الحل .

ب. احسب مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$. اشرح مراحل الحل .

2. أ. افحص تقارب أو تباعد السلاسل الآتية (برهن)!:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{5n-1}}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+1}$.

ب. جد لأي قيم x تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ متقاربة .

3. (أ) من أجل حساب تقريبي للمجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ قمنا بحساب مجموع أول 100 حد من حدود السلسلة بواسطة الحاسبة ونفرض أننا حصلنا على المجموع A . (أي أن $A = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2+1}$). نستعين بتكامل مناسب لحساب المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ ونستطيع تقدير الخطأ . بأي تكامل نستعين واشرح كيف تجد مجموع السلسلة بالتقريب وقدر الخطأ .

(ب) هل تصح الطريقة المذكورة في (أ) لحساب المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ ؟ لماذا ؟....

4. معطى المعادلة $x^3-6x-2=0$.
أ. قرر عدد الحلول الحقيقية للمعادلة بناءً على القانون . ب. جد حلول المعادلة حسب القانون .
ج. جد الحل الأكبر للمعادلة حسب طريقة رابسون - نيوتن .

5. (أ) كم عدد الحلول الحقيقية للمعادلة $x^7+12x-18=0$ ؟ كيف ؟
(ب) حل المعادلة حسب طريقة التنصيف بحيث يكون الخطأ أصغر من $\frac{1}{128}$ أكتب المراحل ~~أجو~~ (أبق الأجوبة في كل مرحلة على شكل أعداد نسبية $\frac{m}{n}$).
ج. حل المعادلة حسب طريقة رابسون - نيوتن . سجل الحدود الاربعة الأولى كما تظهر على الحاسبة ثم أكتب الجواب الذي تنتهي اليه الحاسبة .
بالنجاح الباهر .

حلول المعادلة : $x^3+px+q=0$

<table>
<tr><td colspan="3">$x = 0$</td><td>$p > 0$</td><td rowspan="2">$q = 0$</td><td rowspan="8">$\Delta = \frac{3\sqrt{3}\,q}{2\lvert p\rvert\sqrt{\lvert p\rvert}}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$x = 0,\ x = \sqrt{-p}\ ,\ x = -\sqrt{-p}$</td><td>$-p \ge 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$x = \sqrt[3]{-q}$</td><td>$p = 0$</td><td rowspan="6">$q \ne 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sinh\left(\frac{1}{3}\sinh^{-1}(-\Delta)\right)$</td><td>$p > 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x_{k+1} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\sin\left(\frac{1}{3}\sin^{-1}(\Delta) + 120^\circ k\right)$
כאשר $k = 0,\ 1,\ 2$</td><td>$\lvert\Delta\rvert < 1$</td><td rowspan="4">$p < 0$</td></tr>
<tr><td>$x = \sqrt{-\frac{p}{3}},\ x = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}$</td><td>$\Delta = 1$</td><td rowspan="2">$\lvert\Delta\rvert = 1$</td></tr>
<tr><td>$x = 2\sqrt{-\frac{p}{3}},\ x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$</td><td>$\Delta = -1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = -\mathrm{sgn}(q)\, 2\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}\cosh\left(\frac{1}{3}\cosh^{-1}\lvert\Delta\rvert\right)$</td><td>$\lvert\Delta\rvert > 1$</td></tr>
</table>

رابسون - نيوتن :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$